BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОГЛОЩАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

У.М.МАМЕДОВА
Азербайджанский Технический Университет

В полуполосе рассматривается смешанная задача для линейного гиперболического уравнения с нестационарными граничными условиями и нестационарными условиями сопряжения. Сначала для соответствующей линеаризованной задачи доказывается экспоненциальное убывание соответствующей полугруппы. Основным результатом данной заметки является доказательство существования поглощающего множества.

Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{m+1}$. В области $Q = [0,\infty) \times [a_1, a_{m+1}]$ рассмотрим следующую смешанную задачу

$$\ddot{u}_i(t,x) + \alpha_i \dot{u}_i(t,x) - u_i''(t,x) + f_i(u_i(t,x)) = g_i(x),\ (t,x) \in [0,\infty) \times (a_i, a_{i+1}),\ i = 1,\ldots,m, \tag{1}$$

$$\ddot{u}_1(t,a_1) + \beta_0 \dot{u}_1(t,a_1) - u_1'(t,a_1) + \varphi_0(u_1(t,a_1)) = h_0,\quad t > 0, \tag{2_0}$$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{u}_j(t,a_{j+1}) + \beta_j \dot{u}_j(t,a_{j+1}) + u_j'(t,a_{j+1}) - u_{j+1}'(t,a_{j+1}) + \varphi_j(u_j(t,a_{j+1})) = h_j,\ j = 1,\ldots,m-1,\\ &u_j(t,a_{j+1}) = u_{j+1}(t,a_{j+1}),\ j = 1,\ldots,m-1 \end{aligned}\right\} \tag{2_i}$$

$$\ddot{u}_m(t,a_{m+1}) + \beta_m \dot{u}_m(t,a_{m+1}) + u_m'(t,a_{m+1}) + \varphi_m(u_m(t,a_{m+1})) = h_m, \tag{2_{m+1}}$$

$$u_i(0,x) = u_{0i}(x),\qquad \dot{u}_i(0,x) = u_{1i}(x),\qquad x \in [a_i,\ a_{i+1}],\ i = 1,\ldots,m, \tag{3}$$

где $\dot{u}_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t}$, $\ddot{u}_i = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_i' = \dfrac{\partial u_i}{\partial x}$, $u_i'' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, f_i, g_i, φ_j, $i = 1,\ldots,m, j = 0,1,\ldots,m$ заданные функции, $\alpha_i \in R$, $\beta_j, h_j \in R$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 0,1,\ldots,m$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1^0. $\alpha_i > 0$, $i = 1,\ldots,m$; $\beta_j > 0$, $j = 0,1,\ldots,m$;

2^0. $f_i(\cdot) \in C^2(R)$, $f_i(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^{p_i - 1}\mathbf{v} + f_{1i}'(\mathbf{v})$, $0 \le f_{1i}(\mathbf{v}) \le c(1 + |\mathbf{v}|^{\rho_i})$,
$f_{1i}'(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \ge c_1 f_{1i}(\mathbf{v}) - c_2 |\mathbf{v}|^2$, $\rho_i \le p_i + 1, i = 1,\ldots,m$;

3^0. $\varphi_j(\cdot)\in C^2(R)$, $\quad \varphi_j(t)=\gamma_j t+|t|^{q_j-1}t+\varphi'_{1j}(t)$, $\quad 0\le\varphi_{1j}(t)\le c(1+|t|^{r_j})$,

$\varphi'_{1j}(t)t\ge c_3\varphi_{1j}(t)-c_4t^2$, $\quad r_j<q_j+1$, $\quad j=0,1,\dots,m$, где

$$\gamma_j>0, \quad j=0,1,\dots,m. \tag{4}$$

4^0. $g_i(x)\in L_2(a_i,b_i)$, $i=1,2,\dots,m$; $\;h_j\in R$, $\;j=0,1,\dots,m$.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{H}=\prod_{i=1}^{m}L_2(a_i,a_{i+1}),$$

$$\hat{H}_0=\{\bar{u},\ \bar{u}=(u_1,\dots,u_m),\ u_i\in W_2^2(a_i,a_{i+1}),\ i=1,\dots,m,\ u_j(a_{j+1})=u_{j+1}(a_{j+1}),\ j=1,\dots,m-1\},$$

$$\hat{H}_{1/2}=\{\bar{u},\ \bar{u}=(u_1,\dots,u_m),\ u_i\in W_2^1(a_i,a_{i+1}),\ i=1,\dots,m,\ u_j(a_{j+1})=u_{j+1}(a_{j+1}),\ j=1,\dots,m-1\},$$

$$H^1=L_2(a_1,a_2)\oplus R\oplus R,\qquad H^i=L_2(a_i,a_{i+1})\oplus R,\quad i=2,\dots,m,$$

$$H_0^1=W_2^2(a_1,a_2)\oplus R\oplus R,\qquad H_0^i=W_2^2(a_i,a_{i+1})\oplus R,\quad i=2,\dots,m,$$

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{i=1}^{m}H^i,\qquad \mathcal{H}_0=\bigoplus_{i=1}^{m}H_0^i,\qquad \mathcal{H}_1=\{w:\ w=(w_1,\dots,w_m),\ w_1=(u_1,u_1(a_2),u_1(a_1)),$$

$$w_i=(u_i,u_i(a_{i+1})),\ i=1,\dots,m,\ \text{ где } (u_1,\dots,u_m)\in\hat{H}_0\}.$$

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим операторы A и B следующим образом:

$D(A)=\mathcal{H}_1$,

$$Aw=(-u_1''(x),\ u_1'(a_2)-u_2'(a_2)+\gamma_1u_1(a_2),\ \ -u_1'(a_1)+\gamma_0u_1(a_1),\ -u_2''(x),$$
$$u_2'(a_3)-u_3'(a_3)+\gamma_2u_3(a_2),\dots,\ -u_{m-1}''(x),u_{m-1}'(a_m)-u_m'(a_m)+\gamma_{m-1}u_{m-1}(a_{m-1}),$$
$$-u_m''(x),\ u_m'(a_{m+1})+\gamma_mu_m(a_{m+1})),$$

$D(B)=\mathcal{H}$,

$$Bw=(+\alpha_1u_1(x),\ -\beta_1u_1(a_2),+\beta_0u_1(a_1),\ +\alpha_2u_2(x),+\beta_2u_2(a_3),\dots,$$
$$+\alpha_{m-1}u_{m-1}(x),+\beta_{m-1}u_{m-1}(a_m),\ \alpha_mu_m(x),+\beta_mu_m(a_{m+1})).$$

Легко показать, что A - самосопряженный оператор:

$$\langle Aw,w\rangle_{\mathcal{H}}=\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|u_i'(x)|^2dx+\sum_{j=0}^{m}\gamma_iu_j^2(a_{j+1}). \tag{5}$$

С другой стороны,

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}}u_i^2(x)dx\le\lambda_i(1+\varepsilon)+\lambda_i\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_{a_i}^{a_{i+1}}u_i'^2(x)dx, \tag{6}$$

где $\lambda_i=a_{i+1}-a_i$, $\;i=1,2,\dots,m$.

Из (5), (6) следует, что

$$\langle Aw,w\rangle_{\mathcal{H}}\ge\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}u_i^2(x)dx+\sum_{j=0}^{m}(\gamma_j-\varepsilon)u_j^2(a_{j+1}), \tag{7}$$

Выбирая ε достаточно малым, отсюда получим, что A - положительно определенный оператор.

Аналогично доказывается, что B - ограниченный оператор в $\mathcal{H}$ и

$$B = B^* \geq \overline{\beta} I\,, \tag{8}$$

где $\overline{\beta} = \min\limits_{i=1,\,\dots,\,m} \beta_i$.

Задача (1)-(3) сводится к задаче Коши

$$\ddot{w}(t) + B\dot{w}(t) + Aw(t) = F(t, w(t), \dot{w}(t))\,, \tag{9}$$

$$w(0) = w_0\,, \qquad \dot{w}(0) = w_1\,, \tag{10}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где

$$\begin{aligned}
&w_0 = (u_{10}(x), u_{10}(a_2), u_{10}(a_1), u_{20}(x), u_{20}(a_3), \dots, u_{m0}(x), u_{m0}(a_{m+1})),\\
&w_1 = (u_{11}(x), u_{11}(a_2), u_{11}(a_1), u_{21}(x), u_{21}(a_3), u_{m1}(x), u_{m1}(a_{m+1})),\\
&F(w) = (z_1, z_{11}, z_{10}, z_2, z_{21}, \dots, z_m, z_{m1}),\\
&z_i = g_i(x) - f_i(u_i(x)),\;\; z_{ij} = h_j - |\,u_i(t, a_{j+1})|^{q_j - 1}\, u_i(t, a_{j+1}) - \varphi_{1j}(u_i(t, a_{j+1})),\\
&i = 1, \dots, m,\;\; j = 0, 1.
\end{aligned}$$

В работе [1] доказано, что при любых $w_0 \in \mathcal{H}_1$, $w_1 \in \mathcal{H}_{1/2} = [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}]_{1/2}$ задача (9)-(10) имеет единственное решение

$$w \in C([0,\infty); \mathcal{H}_1) \cap C^1([0,\infty); \mathcal{H}_{1/2}) \cap C^2([0,\infty); \mathcal{H})\,.$$

Совершенно аналогично можно доказать, что при любых $w_0 \in \mathcal{H}_{1/2}$, $w_1 \in \mathcal{H}$ задача (9)-(10) имеет единственное решение $w \in C([0,\infty); \mathcal{H}_{1/2}) \cap C^1([0,\infty); \mathcal{H})$. Таким образом, задача (9)-(10) порождает нелинейную полугруппу $W(t)$, действующую в $\mathcal{H}$.

Определение. Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ совокупность всех ограниченных подмножеств множества $\mathcal{H}$. $B_0 \subset B(\mathcal{H})$ называется поглощающим множеством для полугруппы $W(t)$, если для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ существует такое $t_B > 0$, что при любых $t \geq t_B$, $W(t)B \subset B_0$ (см. [2]).

Цель настоящей работы доказать существование поглощающего множества $B_0 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ для полугруппы $W(t)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1^0-4^0. Тогда нелинейная полугруппа $W(t)$, соответствующая задаче (8)-(9), имеет поглощающее множество в пространстве $\mathcal{H}$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{w}(t) + B\dot{w}(t) + Aw(t) = f(t), \quad t > 0\,, \tag{11}$$

$$w(0) = w_0\,, \qquad \dot{w}(0) = w_1\,, \tag{12}$$

где $f(\cdot) \in L^1([0,\infty); \mathcal{H})$.

Лемма 1. Пусть $w_0 \in \mathcal{H}$, $w_1 \in \mathcal{H}_{1/2}$, тогда для решения задачи (11)-(12)

справедливо тождество

$$\frac{dE(t)}{dt}+E_0(t)=\left\langle f(t),\ \dot{w}(t)+\eta w(t)\right\rangle_{\mathcal{H}}\ , \tag{13}$$

где

$$E(t)=\frac{1}{2}\|\dot{w}(t)\|_{\mathcal{H}}^2+\eta\left\langle \dot{w}(t),w(t)\right\rangle_{\mathcal{H}}+\frac{1}{2}\left\|A^{1/2}w(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2+\frac{\eta}{2}\left\|B^{1/2}w(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2\ , \tag{14}$$

$$E_0(t)=\left\|B^{1/2}\dot{w}(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2-\|\dot{w}(t)\|_{\mathcal{H}}^2+\eta\left\|A^{1/2}w(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2\ . \tag{15}$$

Ввиду (7), (8) и (14), (15) справедливо следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1^0-2^0 и (4). Тогда существуют такие постоянные $c_2>c_1>0$, $\bar{c}_2>\bar{c}_1>0$, что

$$c_1E_0(t)\le E(t)\le c_2E_0(t), \tag{16}$$

$$\bar{c}_1E_1(t)\le E(t)\le \bar{c}_2E_1(t), \tag{17}$$

где $E_1(t)=\|\dot{w}(t)\|_{\mathcal{H}}^2+\|w(t)\|_{\mathcal{H}_{1/2}}^2$.

Пусть $w=w(t)$ - решение задачи (11)-(12). Тогда из (13) и (14) получим, что

$$\frac{dE(t)}{dt}+\omega E(t)\le\left\langle f(t),\dot{w}(t)+\eta w(t)\right\rangle_{\mathcal{H}}\ , \tag{18}$$

где $\omega=c_2^{-1}$. Из (18) следует, что если $f(t)=0$, то

$$E(t)\le E(0)e^{-\omega t},\quad t>0\ . \tag{19}$$

Пусть $U(t)$ полугруппа, порожденная задачей (11)-(12) при $f(t)=0$ в пространстве $\mathcal{H}_{1/2}\times\mathcal{H}$.

Используя лемму 2, из (18) получим, что

$$\|U(t)w_0\|_{\mathcal{H}_{1/2}\times\mathcal{H}}\le Me^{-\omega t}\|w_0\|_{\mathcal{H}_{1/2}\times\mathcal{H}}\ ,$$

т.е.

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_{1/2}\times\mathcal{H}\to\mathcal{H}_{1/2}\times\mathcal{H}}\le Me^{-\omega t},\quad t>0\ .$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1^0 и (19). Тогда полугруппа $U(t)$ экспоненциально убывает.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x,t)$ - решение задачи (1)-(3). Тогда из неравенства (17), ввиду определения $\mathcal{H}$, получим:

$$\frac{dE(t)}{dt}+\omega E(t)\le-\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\left[g_i(x)-|u_i(t,x)|^{p_i-1}u_i(t,x)-f_{1i}'(u_i(t,x))\right]\times$$

$$\times\left(\dot{u}_i(t,x)+\eta u_i(t,x)\right)dx+\sum_{j=0}^{m}\left[h_j-|u_j(t,a_{j+1})|^{q_j}u_j(t,a_{j+1})-\right. \tag{20}$$

$$\left.-\varphi_{1j}'(u_j(t,a_{j+1}))\right]\left(\dot{u}_j(t,a_{j+1})+\eta u_j(t,a_{j+1})\right).$$

Каждое слагаемое преобразуем и оценим сверху:

$$J_1=-\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(x)\big(\dot u_i(t,x)+\eta u_i(t,x)\big)dx\le\frac{2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i^2(x)\,dx+\varepsilon\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\dot u_i^2(x)\,dx+$$
$$+\lambda^2\eta\varepsilon\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}u_i'^2(t,x)\,dx+\lambda\varepsilon\eta\sum_{j=1}^{m-1}u_j^2(t,a_{j+1}),\qquad \lambda=\max(a_{i+1}-a_i),\tag{21}$$

$$J_2=-\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|u_i(t,x)|^{p_i-1}u_i(t,x)\big(\dot u_i(t,x)+\eta u_i(t,x)\big)dx=$$
$$=-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i+1}\frac{d}{dt}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|u_i(t,x)|^{p_i+1}dx-\eta\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|u_i(t,x)|^{p_i+1}dx,\tag{22}$$

$$J_3=-\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}f_{1i}'(u_i(t,x))\big(\dot u_i(t,x)+\eta u_i(t,x)\big)dx=-\sum_{i=1}^{m}\frac{d}{dt}\int_{a_i}^{a_{i+1}}f_{1i}(u_i(t,x))\,dx-$$
$$-\eta\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}f_{1i}'(u_i(t,x))\,u_i(t,x)\,dx\le-\sum_{i=1}^{m}\frac{d}{dt}\int_{a_i}^{a_{i+1}}f_{1i}(u_i(t,x))\,dx-\tag{23}$$
$$-\eta c_1\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{a_{i+1}}f_{1i}(u_i(t,x))dx+\sum_{i=1}^{m}c_2\eta\int_{a_i}^{a_{i+1}}u_i^2(t,x)\,dx,$$

$$J_4=\sum_{j=0}^{m}h_j^2\big(\dot u_j(t,a_{j+1})+\eta u_j(t,a_{j+1})\big)\le\frac{2}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{m}h_j^2+\varepsilon\sum_{j=0}^{m}u_j^2(t,a_{j+1})+\eta\varepsilon\sum_{j=0}^{m}u_j^2(t,a_{j+1}),\tag{24}$$

$$J_5=-\sum_{j=0}^{m}|u_j(t,a_{j+1})|^{q_j}u_j(t,a_{j+1})\big(\dot u_j(t,a_{j+1})+\eta u_j(t,a_{j+1})\big)=$$
$$=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{q_j+1}\frac{d}{dt}|u_j(t,a_{j+1})|^{q_j+1}-\eta\sum_{j=0}^{m}|u_j(t,a_{j+1})|^{q_j+1},\tag{25}$$

$$J_6=-\sum_{j=0}^{m}\varphi_{1j}'(u_j(t,a_{j+1}))\big(\dot u_j(t,a_{j+1})+\eta u_j(t,a_{j+1})\big)=$$
$$=-\sum_{j=0}^{m}\frac{d}{dt}\varphi_{1j}(u_j(t,a_{j+1}))-\eta\sum_{j=0}^{m}\varphi_{1j}'(u_j(t,a_{j+1}))(u_j(t,a_{j+1}))\le\tag{26}$$
$$\le-\sum_{j=0}^{m}\frac{d}{dt}\varphi_{1j}(u_j(t,a_{j+1}))-\eta c_3\sum_{j=0}^{m}\varphi_{1j}(u_j(t,a_{j+1}))+c_4\eta\sum_{j=0}^{m}u_j^2(t,a_{j+1}).$$

Учитывая (21)-(26) в (20) для достаточно малых $\varepsilon>0$, $\eta>0$ получим неравенство

$$\frac{d\widetilde E(t)}{dt}+\omega_1\widetilde E(t)\le\ell,\tag{27}$$

где $\omega_1 = \omega_1(\varepsilon, \eta)$, $\ell = \ell(\varepsilon, \eta)$

$$\widetilde{E}(t) = E(t) + \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{p_i + 1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} | u_i |^{p_i + 1} \, dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_{1i}(u_i(t,x))\, dx \right] +$$
$$+ \sum_{j=0}^{m} \left[\frac{1}{q_j + 1} | u_j(t, a_{j+1}) |^{q_j + 1} + \varphi_{1j}(u_j(t, a_{j+1})) \right]. \tag{28}$$

Из 2^0 и 3^0 следует, что $\widetilde{E}(t) \geq 0$. Учитывая это, из (27) получим следующее неравенство

$$\widetilde{E}(t) \leq \widetilde{E}(0) e^{-\omega_1 t} - \frac{\ell}{\omega_1} e^{-\omega_1 t} + \frac{\ell}{\omega_1}. \tag{29}$$

Из (16), (28) и (29) получим, что

$$E_1(t) \leq \bar{c}_1^{-1} \widetilde{E}(t) \leq \frac{1}{\bar{c}_1} \left[\bar{c}_2 E_1(0) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{p_i + 1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |u_{0i}|^{p_i+1} dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_{1i}(u_{0i}(x)) dx \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{1}{q_j + 1} \left| u_{0j}(a_{j+1}) \right|^{q_j + 1} + \varphi_{1j}(u_{0j}(a_{j+1})) \right) \right] e^{-\omega_1 t} - \frac{\ell}{\bar{c}_1 \omega_1} e^{-\omega_1 t} + \frac{\ell}{\bar{c}_1 \omega_1}. \tag{30}$$

Из условий 2^0 и 3^0, а также теорем вложения получим, что

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_{1i}(u_{0i}(x)) dx \leq c\lambda_i + \int_{a_i}^{a_{i+1}} | u_i |^{\rho_i + 1} \, dx \leq c\lambda_i + c\lambda_i b_i^{\rho_i + 1} \| u_{0i}(x) \|_{W_2^2(a_i, a_{i+1})}^{\rho_i + 1}, \tag{31}$$

$$\varphi_{1j}(u_{0j}(a_{j+1})) \leq c + c u_{0j}^{r_j}(a_{j+1}), \tag{32}$$

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left| u_{0i}(x) \right|^{p_i + 1} dx \leq c\lambda_i b_i^{\rho_i + 1} \| u_{0i} \|_{W_2^2(a_i, a_{i+1})}^{p_i + 1}, \tag{33}$$

где b_i - норма оператора вложения $W_2^1(a_i, a_{i+1}) \subset C[a_i, a_{i+1}]$, $\quad i = 1, \ldots, m$.

Из (30)-(33) следует, что

$$\| \theta(t) \|_{\mathcal{H}_{1/2} \times \mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{\bar{c}_1} \left[\bar{c}_2 \| \theta_0 \|_{\mathcal{H}_{1/2} \times \mathcal{H}}^2 + c \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i b_i^{\rho_i + 1}}{p_i + 1} \| u_{0i}(x) \|_{W_2^2(a_i, a_{i+1})}^{p_i + 1} + \lambda_i b_i^{\rho_i + 1} \| u_{0i}(x) \|_{W_2^2(a_i, a_{i+1})}^{\rho_i + 1} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{1}{q_j + 1} \left| u_{0j}(a_{j+1}) \right|^{q_j + 1} + \left| u_{0j}(a_{j+1}) \right|^{r_j + 1} \right) \right] e^{-\omega_1 t} - \frac{\ell}{\bar{c}_1 \omega_1} e^{-\omega_1 t} + \ell_1, \tag{34}$$

где $\ell_1 = \dfrac{\ell + (2m+1) c \lambda \omega_1}{\bar{c}_1 \omega_1}$.

Пусть $r_0 = \sqrt{1 + \ell_1}$ и $B_r \subset \mathcal{H}$ шар радиуса $r > 0$ и $\theta_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in B_r$, т.е.

$\|w_0\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}} + \|w_1\|^2_{\mathcal{H}} \le r^2$. Из (34) следует, что

$$\|\theta(t)\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}\times\mathcal{H}} \le \frac{1}{\overline{c}_1}\left[\overline{c}_2 r^2 + c\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i b_i^{\rho_i+1}}{p_i+1} r^{p_i+1} + \lambda_i b_i^{\rho_i+1} r^{\rho_i+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{q_j+1} r^{q_j+1} + r^{r_j+1}\right)\right] e^{-\omega_1 t} - \frac{1}{\overline{c}_1\omega_1} e^{-\omega_1 t} + \ell_1 .$$

Отсюда получим, что если

$$t \ge t_r = \frac{1}{\omega_1}\ln\frac{1}{\overline{c}_1}\left[\overline{c}_2 r^2 + c\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i b_i^{\rho_i+1}}{p_i+1} r^{p_i+1} + \lambda_i b_i^{\rho_i+1} r^{\rho_i+1}\right) + \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{q_j+1} r^{q_j+1} + r^{r_j+1}\right)\right],$$

то

$$\|\theta(t)\|_{\mathcal{H}_{1/2}\times\mathcal{H}} \le r_0 ,$$

т.е. $\theta(t) \in B_{r_0}$.

Таким образом, B_{r_0} является поглощающим множеством для нелинейной полугруппы $W(t)$.

Замечание. Вместо условия (4) достаточно требовать $\gamma_j \ge 0,\ j = 0,\ldots,m$ и $\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_m > 0$.

В заключение хочу выразить благодарность д.ф.-м.н., проф. А.Б.Алиеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev A.B., Mamedova U.M. The initial boundary value problems for the quasilinear hyperbolic equations with non stationary non local boundary conditions // Proceedings of Institute of mathematics and mechanics, vol. XXIV(XXXII), Baku: «Elm», 2006, p. 53-70.
2. Бабин А.В., Вишик А.Б. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: «Наука», 1989.
3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: «Наука», 1977.

YARIMXƏTTİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QEYRİ-STASİONAR SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ DAXİLİNDƏ UDUCU ÇOXLUĞUN VARLIĞI

Ü.M.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

İşdə qeyri-stasionar sərhəd şərtləri və qeyri-stasionar qoşmalıq şərtləri daxilində yarımxətti hiperbolik tənliklər üçün yarımzolaqda qarışıq məsələyə baxılmışdır. Əvvəlcə uyğun xəttiləşdirilmiş məsələyə uyğun yarımqrupun eksponensial azalması və əsas məsələ üçün uducu çoxluğun varlığı isbat edilmişdir.

EXISTENCE OF ABSORBING SET OF THE SEMYLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH NON-STATIONARY BOUNDARY CONDITIONS

U.M.MAMEDOVA

SUMMARY

In this paper we consider the mixed problem for the linear hyperbolic equation with non-stationary boundary conditions and the non-stationary conjugate conditions in a semystrip. First, for corresponding linear problems it is proved exponential decrease of corresponding semygroup. The basic result of the given article is the proof of existence of absorbing set.